C1 Найдите абсциссы всех точек графика функции $f(x)=\dfrac{9-x^2}{x+3}-x^3$, касательные в которых параллельны прямой $y=-28x$ или совпадают с ней.

Ответ:
3.

Решение:

1) Область определения функции f - объединение промежутков $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$.
   Упростим формулу, задающую функцию :
   $f(x)=\dfrac{9-x^2}{x+3}-x^3=3-x-x^3$ при $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$.
2) $f'(x)=-1-3x^2$.
   $f'(x)=-28$ при $x=3$ $(-3\notin(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty))$.

Ответ: 3.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) найдена область определения функции и упрощена формула, задающая функцию; 2) найдена абсцисса точки касания. [1] Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены вычислительная ошибка или вычислительная ошибка и описка в шаге 2), не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой описки или ошибки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

[1] Возможно, что область определения функции f не найдена в явном виде, но произведен отбор корней уравнения $f'(x)=-28$.

C2 Найдите все значения x, при каждом из которых произведение значений выражений $4+\sqrt[6]{-2x^2+5x-2}$ и $\sin x-1$ отрицательно.

Ответ:
$\left[0,5;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};2\right]$.

Решение:
1) По условию задачи

$$\left(4+\sqrt[6]{-2x^2+5x-2}\right)\cdot(\sin x-1)<0\Leftrightarrow\begin{cases}4+\sqrt[6]{-2x^2+5x-2}>0\\ \sin x-1<0\end{cases}.$$

2) Решим данную систему:

$$\begin{cases}-2x^2+5x-2\ge 0\\ \sin x-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0,5\le x\le 2\\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0,5\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2}<x\le 2\end{array}\right..$$

Ответ: $\left[0,5;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};2\right]$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) составлено неравенство по условию задачи, которое заменено равносильной совокупностью систем неравенств или системой неравенств; 2) найдено решение составленной совокупности систем неравенств или системы неравенств. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены вычислительная ошибка или вычислительная ошибка и описка в шаге 2), не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки и описки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

C3 Найдите все значения $a \neq 0$, при каждом из которых хотя бы одно значение функции $y = \dfrac{a^2}{1+x^2} + 4$ **не** принадлежит промежутку $\left(2;\ 3+12a^{-2}\right]$.

Ответ:
$a < -\sqrt{3},\ a > \sqrt{3}$.

Решение:

1) область значений данной функции — промежуток $E(y) = \left(4;\ a^2+4\right]$;

2) найденный промежуток содержит точку, не принадлежащую заданному промежутку, тогда и только тогда, когда $a^2 + 4 > 3 + 12a^{-2}$;

3) полученное неравенство равносильно следующему

$$a^4 + a^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow \left(a^2 - 3\right)\left(a^2 + 4\right) > 0 \Leftrightarrow a^2 > 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \sqrt{3} \\ a < -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $a < -\sqrt{3},\ a > \sqrt{3}$.

Замечание. Степень подробности предложенного нами решения достаточна для получения максимальной оценки. При этом в работах выпускников:

1) нахождение необходимого и достаточного условия на параметр может сопровождаться рисунками, иллюстрирующими различные варианты расположения промежутков на числовой оси.

2) искомые значения параметра могут быть получены из условия, что при них хотя бы одно значение x не удовлетворяет двойному неравенству

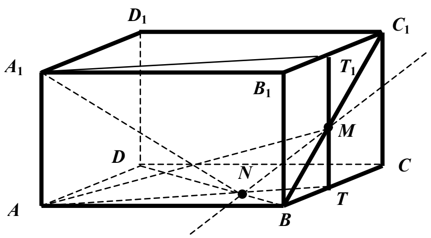
$$2 < \frac{a^2}{1+x^2} + 4 \leqslant 3 + 12a^{-2}.$$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Получен ответ, возможно, *неточный* (т.е. отличающийся от верного заменой строгих неравенств нестрогими). Обоснование ответа, возможно, содержит некоторые неточности или пробелы (например, неверно объяснено или не указано вовсе, какие значения принимает данная функция).
2	Получено необходимое и достаточное условие на параметр в виде неравенства (возможно, *неточного*), но оно не решено или решено неверно.
1	В решении есть некоторые продвижения: например, найдена область значений данной функции или приведено только достаточное условие ($4 \geqslant 3 + 12a^{-2}$) на параметр или противоположное необходимому и достаточному.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.

C4 Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB = 6$, $AD = 7$, $AA_1 = 7\sqrt{61}$. Точка M лежит на диагонали BC_1, точка N лежит на диагонали BD, прямые AM и A_1N пересекаются. Определите тангенс угла между прямой MN и плоскостью ABC, если $BN : ND = 5 : 7$.

__Ответ__:
12.

Решение:



1. По условию прямые AM и A_1N пересекаются, поэтому точки A, M, N, A_1 лежат в одной плоскости – плоскости α. Плоскость α проходит через прямую AA_1, которая параллельна плоскости BC_1C. Поэтому плоскость α пересекает плоскость BC_1C по прямой TT_1, параллельной прямой AA_1, где точки T и T_1 лежат на ребре BC и B_1C_1 соответственно. Поскольку прямая AM пересекает диагональ BC_1 в точке M, то M – точка пересечения прямой TT_1 с диагональю BC_1.

2. Плоскость ATM перпендикулярна плоскости ABC, поэтому прямая NT является проекцией прямой MN на плоскость ABC. Значит, следует найти тангенс угла MNT. Пусть $\angle MNT = \gamma$, тогда $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{MT}{NT}$.

3. Треугольники BTN и DAN подобны с коэффициентом подобия $k = BN : ND = 5 : 7$, поэтому $BT = \dfrac{5}{7}AD = 5$ и значит, $NT = \dfrac{5}{12}AT = \dfrac{5}{12}\sqrt{6^2 + 5^2} = \dfrac{5}{12}\sqrt{61}$. Аналогично, $MT = \dfrac{5}{7}CC_1 = 5\sqrt{61}$

Отсюда $\operatorname{tg}\gamma = 12$.

Ответ: 12.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Приведены вычисления отношений, требуемых для получения ответа, и получен верный ответ. Обоснование полученного ответа или отсутствует, или содержит пробелы (например, не описано сечение параллелепипеда плоскостью α).
2	Приведены верные вычисления не всех требуемых отношений и длин (например, найдено отношение $BT : BC$ и длина MT). Окончательный ответ не получен или неверен.
1	Приведено верное вычисление только одного из требуемых отношений или только одной из требуемых длин.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.

C5 Решите уравнение $x^6 - |7-6x|^3 = 26\cos\left(x^2\right) - 26\cos(7-6x)$.

Ответ:
$1, -7,\ 3 \pm \sqrt{2}.$

Решение:
1) уравнение приводится к виду
$$x^6 - 26\cos\left(x^2\right) = |7-6x|^3 - 26\cos(7-6x) \Leftrightarrow f(x^2) = f(7-6x),$$
где $f(t) = |t|^3 - 26\cos t$;
2) функция f — четная и при $t > 0$ имеет следующую производную
$$f'(t) = \begin{cases} 3t^2 + 26\sin t > 0 + 0 = 0, & 0 < t \leqslant 3, \\ 3t^2 + 26\sin t > 3\cdot 9 - 26 > 0, & t > 3, \end{cases}$$
поэтому $f'(t) > 0$ при всех $t > 0$, следовательно, функция f возрастает на положительной полуоси, а значит, каждое свое значение она принимает ровно в двух симметричных относительно нуля точках;
3) данное уравнение равносильно следующему
$$x^2 = \pm(7-6x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \pm \sqrt{2} \\ (x-1)(x+7) = 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $1, -7,\ 3 \pm \sqrt{2}.$

Замечание. Степень подробности предложенного нами решения достаточна для получения максимальной оценки. При этом решению можно придать бóльшую наглядность с помощью схематического графика рассмотренной функции (которая, в силу непрерывности, возрастает и при $t \geqslant 0$, но явного на то указания в работах не требуется).

Баллы	Критерии оценки выполнения задания C5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Получен верный ответ, но его обоснование содержит неточности или пробелы (например, объявлено, но не доказано строго, что функция возрастает на положительной полуоси).
2	Выписаны и решены оба квадратных уравнения, приводящие к верному ответу, возможно, без обоснования и с арифметическими ошибками.
1	Выписано и решено одно из двух квадратных уравнений, приводящих к верному ответу, возможно, без обоснования и с арифметическими ошибками.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.